А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 7



Шымкент, 2011

Модуль 2. Моделирование и идентификация динамических характеристик объектов

Тема 4 Общие задачи идентификации

Лекция 7 Общие задачи идентификации. Основные определения.

В данной лекции мы рассмотрим Основные характеристики времянных рядов, общие задачи идентификации, основные определения, идентификация объектов управления методом корреляционного анализа.

Основные характеристики времянных рядов

Подробнее (см. [1-4]). Основные понятия: случайная величина и случайный процесс (СП), времянной ряд (ВР), реализация, ансамбль, стационарный СП, эргодический СП, оценка. У стационарных СП матожидание и дисперсия постоянны.

Временной ряд (или ряд динамики) — это упорядоченная по времени последовательность значений некоторой произвольной переменной величины. Тем самым, временной ряд существенным образом отличается от простой выборки данных. Каждое отдельное значение данной переменной называется отсчётом (уровнем, элементов) временного ряда.

В то же время выборка это множество случаев (испытуемых, объектов, событий, образ-цов), с помощью определённой процедуры выбранных из генеральной совокупности для участия в исследовании.

Анализ временных рядов это совокупность математико-статистических методов анализа, предназначенных для выявления структуры временных рядов и для их прогнозирования. Сюда относятся, в частности, методы регрессионного анализа. Выявление структуры вре-мянного ряда необходимо для того, чтобы построить математическую модель того явления, которое является источником анализируемого временного ряда. Прогноз будущих значений временного ряда используется для эффективного принятия решений.

Временные ряды состоят из двух элементов:

- периода времени, за который или по состоянию на который приводятся числовые значения;
- числовых значений того или иного показателя, называемых уровнями ряда.

Временные ряды классифицируются по следующим признакам:

- по форме представления уровней:
  - ряды абсолютных показателей;
  - относительных показателей;
  - средних величин.
- по количеству показателей, для который определяются уровни в каждый момент времени: одномерные и многомерные временные ряды;
- по характеру временного параметра: моментные и интервальные временные ряды. В моментных временных рядах уровни характеризуют значения показателя по состоянию на определенные моменты времени. В интервальных рядах уровни характеризуют значение показателя за определенные периоды времени. Важная особенность интервальных временных рядов абсолютных величин заключается в возможности суммирования их уровней. Отдельные же уровни моментного ряда абсолютных величин содержат элементы повторного счета. Это делает бессмысленным суммирование уровней моментных рядов;
- по расстоянию между датами и интервалами времени выделяют равноотстоящие – когда даты регистрации или окончания периодов следуют друг за другом с равными интервалами и неполные (неравноотстоящие) – когда принцип равных интервалов не соблюдается;
- по наличию пропущенных значений: полные и неполные временные ряды;
- временные ряды бывают детерминированными и случайными: первые получают на основе значений некоторой неслучайной функции (ряд последовательных данных о количестве дней в месяцах); вторые есть результат реализации некоторой случайной величины.
- в зависимости от наличия основной тенденции выделяют **стационарные** ряды – в которых среднее значение и дисперсия постоянны и **нестационарные** – содержащие основную тенденцию развития.

Примеры временных рядов (см. рисунок 7.1)**.** Временные ряды, как правило, возникают в результате измерения некоторого показателя. Это могут быть как показатели (характеристики) технических систем, так и показатели природных, социальных, экономических и других систем (например, погодные данные). Типичным примером временного ряда можно назвать биржевой курс, при анализе которого пытаются определить основное направление развития (тенденцию или тренда).

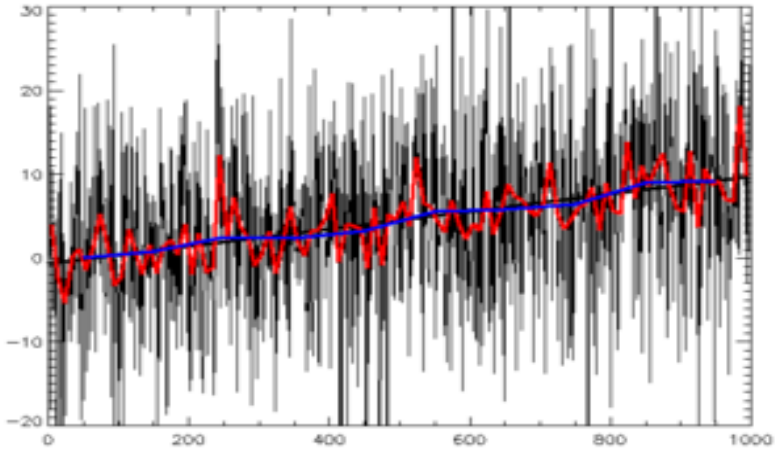


Рисунок 7.1 - Пример временного ряда

Основной чертой, выделяющей анализ временных рядов среди других видов статистического анализа, является существенность порядка, в котором производятся наблюдения. Если во многих задачах наблюдения статистически независимы, то во временных рядах они, как правило, зависимы, и характер этой зависимости может определяться положением наблюдений в последовательности. Природа ряда и структура порождающего ряд процесса могут предопределять порядок образования последовательности.

Иногда **нестационарный** СП g_i можно сделать стационарным $\tilde{y}_i$, удалив низкочастотную аддитивную составляющую (тренд, дрейф), например, применив фильтр верхних частот, использующий спектральное окно Тьюки:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=-m}^{m} h_i g_{i-j},$$

где $h_0 = 1 - \frac{1}{m+1}$ $\qquad h_j = h_{-j} = \frac{1}{2(m+1)}\left[1 + \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right)\right]$, (7.1)

частота среза fc фильтра связана с его порядком m и частотой изменения времянного ряда $f_{ИЗ}$ $f_c = f_{ИЗ} / 2m$.

Среднее значение (матожидание, МО) ВР можно определить как:**.**

$$m_x = M[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt ,$$

Оценка МО $\tilde{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (7.2).

(Среднее по N измерениям, выборочное среднее, характеризует постоянное смещение ВР, неслучайная величина, для стационарного СП $\tilde{m}_x = const$).

В условиях АСУТП обычно стоит задача определения МО в режиме реального времени (online). Для этого может быть применена рекуррентная формула:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + \frac{1}{i}(x_i - \bar{x}_{i-1}), \quad (7.3)$$

где $\bar{x}_i$ текущее значение МО, $\bar{x}_{i-1}$- МО определенное на предыдущем шаге, x_i текущее значение x (сигнал от датчика).

Другой вид формулы $\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i$, где 0<α<2.

Дисперсия ВР представляет собой МО квадрата отклонения x(t) от его среднего.

$$\tilde{D}_x^2 = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i^2) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N}\right], \qquad (7.4)$$

вторая из формул не требует предварительного определения x_i. Формула (7.4) – выборочная несмещенная дисперсия, если N-1 заменить на N получаем формулу для смещенной дисперсии, при больших N это одно и то же. Иногда дисперсию выражают в процентах. $\sigma_x = D_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ - среднеквадратичная погрешность (формула Бесселя).

В АСУТП в режиме on line дисперсия может быть вычислена по рекуррентном формулам:

$$\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i \quad \bar{x}_i^2 = (1-\alpha)\bar{x}_i^2 + \alpha x_i^2 \quad \sigma_i^2 = \bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2 \qquad (7.5)$$

Автокорреляционная функция (АКФ) (см. рисунок 7.2а)

АКФ указывает степень связи последующих значений x(t) с предыдущими; определяет вероятность того, что функция x(t), имеющая в момент t значение x1 , будет в момент t+τ значение x2.

$$\tilde{R}_{xx} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau} \dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{x}_{i+l}\,, \qquad (7.6)$$

где $\dot{x}(t) = x(t) - m_x$, $\dot{x}_i = x_i - \bar{x}$ - центрированный ВР; l – смещение (лаг) на l шагов. В реальных процессах вероятность связи между xi и xi+l уменьшается, и Rxx имеет вид, показанный на рисунке 2.1. АКФ является четной функцией, чем круче опускается ее график, тем слабее связь между x(t) и x(t+τ) и наоборот; у белого шума АКФ δ-функция; Rxx = σ_x^2, при l=0.

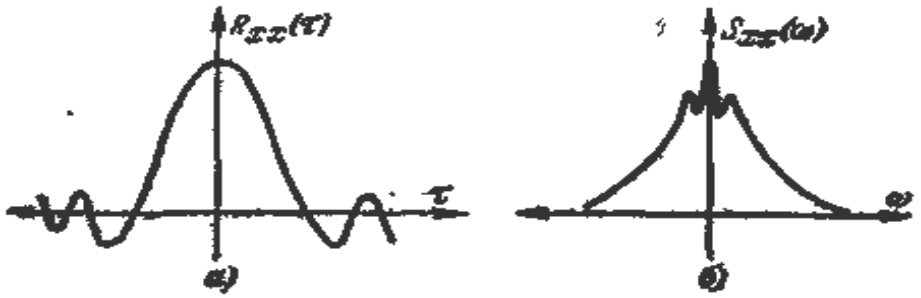


Рисунок.7.2- Графики автокорреляционной функции (а) и спектральной плотности (б).

Взаимная корреляционная функция (ВКФ)

ВКФ указывает степень связи значений входа x(t) в момент времени t со значениями выхода y(t-τ) в момент времени t-τ.

$$\tilde{R}_{xy} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau} \dot{x}(t)\cdot\dot{y}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{y}_{i+l}\,, \qquad (7.7)$$

$R_{xy}(\tau)$ функция нечетная, график ее подобен графику АКФ, но смещен вправо на время запаздывания в объекте.

Спектральная плотность (СП)

Представляет собой преобразование Фурье от АКФ, может быть получена из АКФ или математической обработкой реализации СП, показывает, какая доля мощности СП приходится на данную частоту, позволяет судить о частотных свойствах объекта. Типичный график показан на рисунке 7.2.б. Часто $S_{xx}(\omega)$ получают аналитически, предварительно аппроксимировав R_{xx} каким-либо выражением.

$$S_{xx}(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.8)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.9)$$

Аналогично записываются выражения и для взаимной спектральной плотности $S_{xy}(\omega)$.

При идентификации используют выражения:

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega)\cdot S_{xx}(j\omega) \qquad (7.10)$$

$$S_{yy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega)\cdot|W(j\omega|^2 \qquad (7.11)$$

Если у процесса $S_{xx}(\omega)$ имеет одно и то же значение во всем диапазоне частот от -∞ до ∞ то это идеализированный СП, называемый белым шумом (БШ), у которого любое последующее значение x(t) не связано с предыдущими x(t). Для БШ $R_{xx}(\tau) = S_{xx}\cdot\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$- дельта-функция. Часто вместо БШ используют СП без постоянной и без периодической составляющей со статистическими характеристиками:

$$R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\mu|\tau|} \text{ и } S_{xx}(\omega) = \frac{2\mu D}{\mu^2+\omega^2}. \qquad (7.12)$$

Получение графиков АКФ и ВКФ не представляют особого труда. Однако для расчетов при идентификации обычно используют аналитические выражения. Помимо использования аппроксимации полиномами Чебышева, на практике применяют аппроксимация АКФ показательными и другими функциями.

1). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ (7.13) (см. рисунке 7.2), где α = const, параметр затухания и D_x- дисперсия, получают из аппроксимацией графика. Аналитическое выражение для спектральной плотности получаем в виде:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad . (7.14).$$

В зависимости от вида графика корреляционной функции R_{uu} *(ф*)(Рисунок 4.10), ее аппроксимируют одним из следующих выражений.

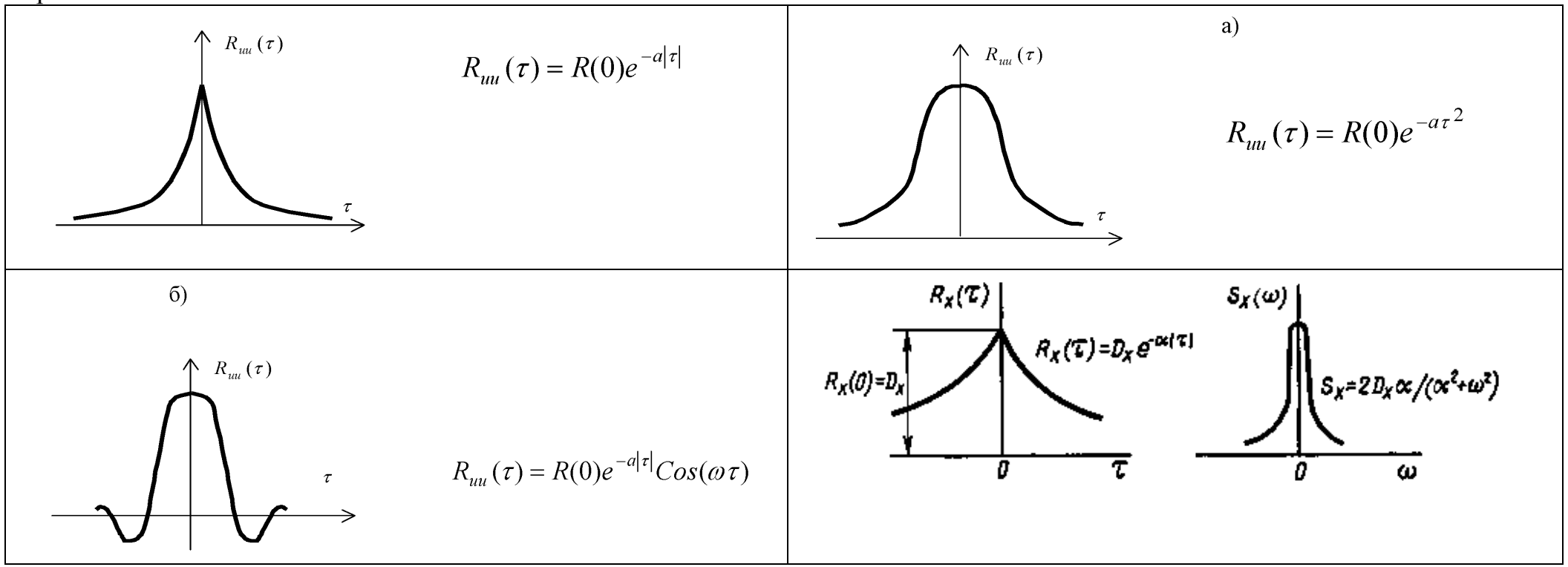


Рисунок 7.3 – аппроксимация АФХ и СП

2). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$ (7.15)

(см. рисунке2.2), где ω0 = const - резонансная частота, откуда:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi}\cdot\frac{\beta^2+\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4}, \beta = \alpha^2+\omega_0^2 \qquad (7.16)$$

3). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(\cos(\omega_0\tau)+\gamma\cdot\sin(\omega_0|\tau|)$ (7.17)

Доказывается, что любая АКФ может быть с любой степенью точности описана линейной комбинацией уравнений (7.15, 2.16, 2.17).

Общие задачи статистической идентификации. В практике моделирования систем наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются стохастическим воздействиям внешней среды. Поэтому основным методом получения результатов с помощью имитационных моделей таких стохастических систем является метод статистического моделирования на ЭВМ, использующий в качестве теоретической базы предельные теоремы теории вероятностей. Возможность получения пользователем модели результатов статистического моделирования сложных систем в условиях ограниченности машинных ресурсов существенно зависит от эффективности процедур генерации псевдослучайных последовательностей на ЭВМ, положенных в основу имитации воздействий на элементы моделируемой системы.

Общая характеристика метода статистического моделирования. На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т. е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей. Статистическое моделирование представляет собой метод получения с помощью ЭВМ статистических данных о процессах, происходящих в моделируемой системе. Для получения представляющих интерес оценок характеристик моделируемой системы S с учетом воздействий внешней среды E статистические данные обрабатываются и классифицируются с использованием методов математической статистики .

Сущность метода статистического моделирования. Таким образом, сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Различают две области применения метода статистического моделирования:

1) для изучения стохастических систем;

2) для решения детерминированных задач.

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи. Естественно, что при такой замене вместо точного решения задачи получается приближенное решение и погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний (реализации моделирующего алгоритма) N.

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализации N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы S.

Теоретической основой метода статистического моделирования систем на ЭВМ являются предельные теоремы теории вероятностей. Множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценить некоторые средние их характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при сложении множества воздействий. Выражением этих закономерностей и устойчивости средних показателей являются так называемые предельные теоремы теории вероятностей, часть из которых приводится ниже в пригодной для практического использования при статистическом моделировании формулировке. Принципиальное значение предельных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализации) N. Практически приемлемые при статистическом моделировании количественные оценки характеристик систем часто могут быть получены уже при сравнительно небольших (при использовании ЭВМ) N.

Идентификация объектов управления методом корреляционного анализа.

Метод корреляционного анализа используется для идентификации объектов управления в том случае, если входные и выходные сигналы являются случайными величинами. Рассмотрим пример определения АФЧХ на основе АКФ и ВКФ.



Рисунок 7.4 - Схема исследования объекта корреляционным методом

При корреляционном анализе используются описанные нами выше:

- автокорреляционная функция (АКФ) и
- взаимокорреляционная функция (ВКФ).

Напомним, что АКФ характеризует зависимость последующих значений случайной величины от предыдущих, находящихся на расстоянии $\Delta\tau$.

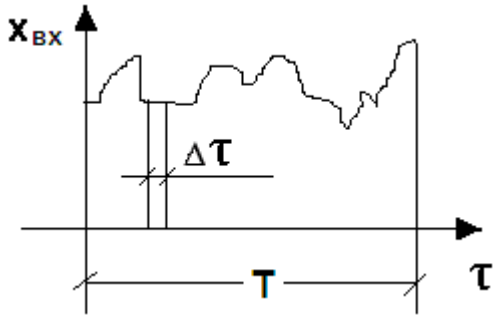


Рисунок 7.5 -. График изменения входной случайной величины – входного сигнала.

АКФ: $R_{x_{вх}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{вх}(\tau + \Delta\tau) \cdot x_{вх}(\tau) \cdot d\tau$. При $\Delta\tau \to 0$ – точнее.

Взаимокорреляционная функция связывает две величины, отстоящие друг от друга на $\Delta\tau$.

ВКФ: $R_{x_{вх};x_{вых}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{вых}(\tau + \Delta\tau) \cdot x_{вх}(\tau) \cdot d\tau$.

С АКФ и ВКФ связаны (через преобразование Фурье, когда входной-выходной сигнал раскладывается в ряд Фурье, состоящий из суммы синусоидальных колебаний с различной ω – ряд гармоник) спектральные плотности случайных величин.

$$S_{x_{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{вх}}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau$$ – для АКФ

$$S_{x_{вх};x_{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{вх};x_{вых}}(\tau) \cdot \Delta\tau \cdot d\tau$$ – для ВКФ.

Физически $S_{x_{вх}}(\omega)$ показывает, какая доля мощности случайной величины приходится на данную частоту.

Через спектральную плотность находим искомую АФЧХ объекта:

$$АФЧХ = \overline{W}(i\omega) = \frac{S_{x_{вх};x_{вых}}(\omega)}{S_{x_{вх}}(\omega)}.$$

Аналитический метод идентификации. Аналитический метод вывода математической модели идентичной (совпадающей) по характеристикам с исследуемым объектом применим тогда, когда физико-химические процессы, происходящие в объекте, хорошо изучены. К таким объектам относятся механические системы, поведение которых в статике и динамике подчиняется законам Ньютона, некоторые химические реакторы с простыми химическими реакциями, протекающими в них. Простым примером такого объекта может служить бак, изображенный на рисунке 7.5.

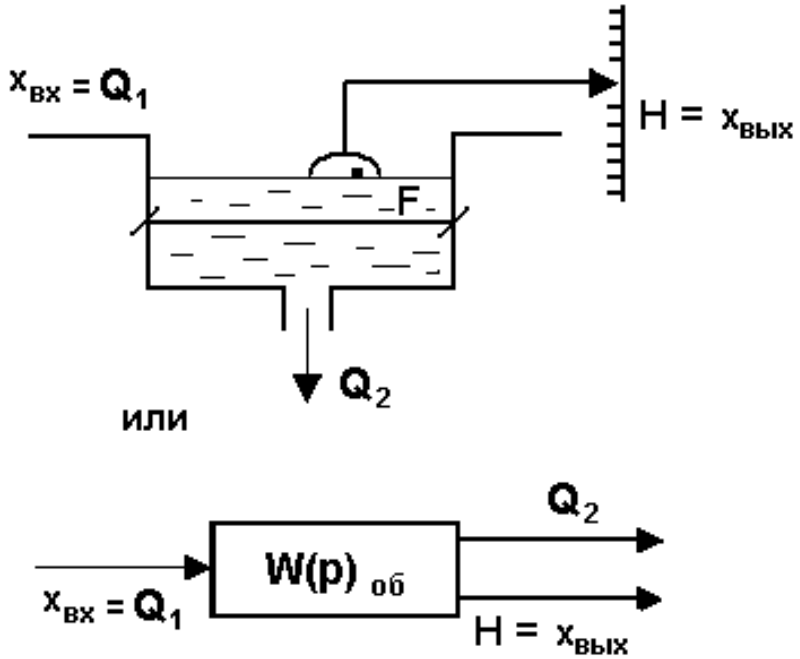


Рисунок 7.5 - Схема исследования объекта управления аналитическим методом.

Опишем явления, протекающие в этом объекте.

Статический режим: $Q_1^0 = Q_2^0$ (приток равен истоку);

Динамический режим: $\begin{cases} Q_1 = Q_1^0 + \Delta Q_1 \\ Q_2 = Q_2^0 + \Delta Q_2 \end{cases}$

$$Q_1 - Q_2 = Q_1^0 + \Delta Q_1 - Q_2^0 - \Delta Q_2 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 =$$
$$= \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{d(F \cdot \Delta H)}{d\tau} = F \cdot \frac{d(\Delta H)}{d\tau}$$

Из гидравлики: $Q_2 = \alpha \cdot \sqrt{H}$ или для малых $\Delta Q_2 = a \cdot \Delta H$.

Тогда: $\Delta Q_1 - a \cdot \Delta H = F \cdot \frac{d(\Delta H)}{d\tau}$

или, переходя к бесконечно малым приращениям: $F \cdot \frac{dH}{d\tau} + a \cdot \Delta H = Q_1$

или $\frac{F}{a} \cdot \frac{dH}{d\tau} + H = \frac{1}{a} \cdot Q_1$

Обозначив в относительной размерности:

$\frac{H}{H_{ном}} = x_{вых}$; $\frac{Q}{Q_{ном}} = x_{вх}$; $\frac{F}{a} = T_0$; $\frac{1}{a} = k_{об}$

получим:

$T_0 \cdot \frac{dx_{вых}}{d\tau} + x_{вых} = k_{об} \cdot x_{вх}$

Это и есть искомая математическая модель, она носит универсальный характер (в отличии от статистических). При ее использовании требуется, чтобы все неизвестные переменные должны быть заданы.

Основная литература

1. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Дополнительная литература

3. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
4. Бенькович Е.С. и др. Практическое моделирование динамических систем. -СПб: БХВ-Петербург, 2002